

## 2.7.24 Použití substituce při řešení rovnic

**Předpoklady:** 020507

**Pedagogická poznámka:** Hodina je pro značné množství studentů příliš náročná, vždy se snažím, aby všichni zkusili alespoň jednu z bikvadratických rovnic na konci. V nejhorsím případě je možné jednu z rovnic vypočítat na začátku příští hodiny.

Co znamená slovo substituce?

- Například metadonová substituce pro závislé na heroinu – místo drogy berou jinou látku.
- Slavná písnička Substitute (Náhražka) od Who.
- Chemická substituce jednoho prvku v molekule druhým.

**Substituce = nahrazení.**

**Př. 1:** Vyřeš rovnici  $4\left(\frac{2x-3}{3x+1}-2\right)=\frac{2x-3}{3x+1}+3$ .

Je to rovnice s neznámou ve jmenovateli – musíme vynásobit výrazem  $(3x+1)$ , abychom zlomky odstranili  $\Rightarrow$  hodně počítání.

**Postřeh:** neznámá se vyskytuje pouze ve zlomku  $\frac{2x-3}{3x+1}$ , který se vyskytuje na obou stranách rovnice. Místo zlomku zavedeme novou proměnnou  $y$ , s tou vyřešíme rovnici a pak pomocí výsledku dopočteme  $x \Rightarrow$  **vyřešíme rovnici pomocí substituce** (ušetříme hodně počítání).

**Substituce:**  $y = \frac{2x-3}{3x+1} \Rightarrow$  Řešíme rovnici:  $4(y-2) = y+3$ .

$$4y - 8 = y + 3$$

$$3y = 11$$

$$y = \frac{11}{3}$$

**Návrat k původní proměnné:**  $y = \frac{11}{3} = \frac{2x-3}{3x+1} \Rightarrow$  Řešíme rovnici:  $\frac{2x-3}{3x+1} = \frac{11}{3}$

Podmínka:  $3x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -\frac{1}{3}$

$$\frac{2x-3}{3x+1} = \frac{11}{3} \quad / \cdot (3x+1)$$

$$3(2x-3) = 11(3x+1)$$

$$6x-9 = 33x+11$$

$$-20 = 27x$$

$$x = -\frac{20}{27}$$

$$K = \left\{ -\frac{20}{27} \right\}$$

**Pedagogická poznámka:** Vzhledem k tomu, že je to první příklad řešený substitucí, někteří studenti trochu tápou a ve chvíli, kdy určí hodnotu  $y$ , mají pocit, že příklad vyřešili. Vysvětlí se to snadno, v dalších příkladech už problémy nemají.

**Př. 2:** Vyřeš rovnici  $\frac{2t}{t+1} + 1 = 6 \frac{t+1}{2t}$ .

**Postřeh:** Proměnná  $t$  se vyskytuje pouze ve zlomcích, které jsou si podobné.

**Substitute:**  $x = \frac{2t}{t+1}$ ,  $\frac{t+1}{2t} = \frac{1}{\frac{t+1}{2t}} = \frac{1}{x} \Rightarrow$  Řešíme rovnici:  $x + 1 = 6 \frac{1}{x}$ .

$$x + 1 = 6 \frac{1}{x} \quad / \cdot x$$

$$x^2 + x = 6$$

$$(x - 2)(x + 3) = 0$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -3$$

**Návrat k původní proměnné:**

Dosadíme  $x_1$ :  $x_1 = 2 = \frac{2t}{t+1} \Rightarrow$  Řešíme rovnici:  $\frac{2t}{t+1} = 2 \quad / \cdot (t+1)$ , podmínka  $t \neq -1$

$$2t = 2t + 2$$

$0 = 2$  - to se nerovná  $\Rightarrow$  pro  $x_1 = 2$  nemáme žádné  $t$ .

Dosadíme  $x_2$ :  $x_2 = -3 = \frac{2t}{t+1} \Rightarrow$  Řešíme rovnici:  $\frac{2t}{t+1} = -3 \quad / \cdot (t+1)$ , podmínka  $t \neq -1$

$$2t = -3t - 3$$

$$5t = -3$$

$$t = -\frac{3}{5}$$

$$K = \left\{ -\frac{3}{5} \right\}$$

**Př. 3:** Vyřeš rovnici  $(u+1)^2 = 3|u+1| + 10$ .

**Substitute:**  $x = (u+1)$  by moc nepomohlo, ale číslo  $(u+1)^2$  je vždy kladné stejně jako číslo  $|u+1|^2$  (je jedno, jestli znaménko zmizí kvůli absolutní hodnotě nebo kvůli umocnění).

Platí tedy  $(u+1)^2 = |u+1|^2$ , rovnici můžeme napsat  $|u+1|^2 = 3|u+1| + 10$ , použijeme substituci  $x = |u+1|$ .  $\Rightarrow$  Řešíme rovnici:  $x^2 = 3x + 10$ .

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$(x - 5)(x + 2) = 0$$

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = -2$$

**Návrat k původní proměnné:**

Dosadíme  $x_1$ :  $x_1 = 5 = |u+1| \Rightarrow$  Řešíme rovnici:  $|u+1| = 5$ .

$|u+1| = |u - (-1)| = 5$  - hledáme čísla, jejichž obraz na číselné ose je od obrazu čísla  $-1$  vzdálen o 5  $\Rightarrow u_1 = 4, u_2 = -6$ .

Dosadíme  $x_2$ :  $x_2 = -2 = |u+1| \Rightarrow$  Nemá řešení, absolutní hodnota nemůže být záporná.

$$K = \{-6; 4\}$$

**Pedagogická poznámka:** Substituce předchozího příkladu napadne někoho jen výjimečně, proto není vhodné studenty příliš dlouho trápit.

Pomocí substituce můžeme řešit i rovnice, které bychom jinak nevyřešili.

**Př. 4:** Vyřeš rovnici  $\sqrt{2(x^2 + 7x + 10)^2 - 7} = x^2 + 7x + 11$ .

Když rovnici umocníme dostaneme tam i  $x^4$  a nevyřešíme ji.

**Substituce:** Hodilo by se  $y = x^2 + 7x + 10$ , ale na pravé straně je něco jiného  $\Rightarrow$  musíme pravou stranu upravit  $x^2 + 7x + 11 = x^2 + 7x + 10 + 1 = y + 1$ .

$\Rightarrow$  Řešíme rovnici:  $\sqrt{2y^2 - 7} = y + 1$ .

$$\sqrt{2y^2 - 7} = y + 1 \quad /^2$$

$$(\sqrt{2y^2 - 7})^2 = (y + 1)^2$$

$$2y^2 - 7 = y^2 + 2y + 1$$

$$y^2 - 2y - 8 = 0$$

$$(y - 4)(y + 2) = 0$$

$$y_1 = 4 \qquad y_2 = -2$$

Musíme udělat zkoušku:

$$y_1 = 4 \qquad \sqrt{2y^2 - 7} = y + 1$$

$$\sqrt{2 \cdot 4^2 - 7} = 4 + 1$$

$$\sqrt{25} = 5$$

$$5 = 5 \text{ - v pořádku } y_1 = 4 \text{ je kořen rovnice } \sqrt{2y^2 - 7} = y + 1.$$

$$y_2 = -2 \qquad \sqrt{2y^2 - 7} = y + 1$$

$$\sqrt{2 \cdot (-2)^2 - 7} = (-2) + 1$$

$$\sqrt{1} = -1$$

$$1 \neq -1 \text{ - nerovná se } y_2 = -2 \text{ není kořen rovnice } \sqrt{2y^2 - 7} = y + 1.$$

Dále počítáme pouze s  $y_1 = 4$ .

**Návrat k původní proměnné:**

Dosadíme  $y_1$ :  $y_1 = 4 = x^2 + 7x + 10 \Rightarrow$  Řešíme rovnici:  $x^2 + 7x + 10 = 4$ .

$$x^2 + 7x + 6 = 0$$

$$(x + 6)(x + 1) = 0$$

$$x_1 = -6 \qquad x_2 = -1$$

$$K = \{-6; -1\}$$

**Pedagogická poznámka:** Poměrně značné procento studentů neudělá zkoušku a při návratu k původní proměnné počítá i s kořenem  $y_2 = -2$ . Získají tak rovnici  $x^2 + 7x + 10 = -2 \Rightarrow x^2 + 7x + 12 = (x+4)(x+3)$ , ze které získají dva „zdanlivé kořeny“  $x_1 = -3$  a  $x_2 = 4$ .

**Př. 5:** Vyřeš rovnici  $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$ .

Rovnice s  $x^4$  neumíme řešit, ale můžeme ji zapsat:  $x^4 - 4x^2 + 3 = (x^2)^2 - 4x^2 + 3 = 0$ , v rovnici pak vystupuje pouze  $x^2$ .

**Substitute:** Použijeme  $y = x^2$ .  $\Rightarrow$  Řešíme rovnici:  $y^2 - 4y + 3 = 0$  obyčejná kvadratická rovnice.

$$y^2 - 4y + 3 = 0$$

$$(y-3)(y-1) = 0$$

$$y_1 = 3$$

$$y_2 = 1$$

**Návrat k původní proměnné:**

Dosadíme  $y_1: y_1 = 3 = x^2$ .  $\Rightarrow$  Řešíme rovnici:  $x^2 = 3$ .

$$x^2 - 3 = 0$$

$$(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 0$$

$$x_1 = -\sqrt{3}$$

$$x_2 = \sqrt{3}$$

Dosadíme  $y_2: y_2 = 1 = x^2$ .  $\Rightarrow$  Řešíme rovnici:  $x^2 = 1$ .

$$x^2 - 1 = 0$$

$$(x+1)(x-1) = 0$$

$$x_3 = -1$$

$$x_4 = 1$$

$$K = \{-\sqrt{3}; -1; 1; \sqrt{3}\}$$

**Př. 6:** Vyřeš rovnici  $4x^4 - 5x^2 - 9 = 0$ .

Rovnice s  $x^4$  neumíme řešit, ale můžeme ji zapsat:  $4x^4 - 5x^2 - 9 = 4(x^2)^2 - 5x^2 - 9 = 0$ , v rovnici pak vystupuje pouze  $x^2$ .

**Substitute:** Použijeme  $y = x^2$ .  $\Rightarrow$  Řešíme rovnici:  $4y^2 - 5y - 9 = 0$  obyčejná kvadratická rovnice.

$$4y^2 - 5y - 9 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-9)}}{2 \cdot 4} = \frac{5 \pm \sqrt{169}}{8} = \frac{5 \pm 13}{8}$$

$$y_1 = \frac{5+13}{8} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$$

$$y_2 = \frac{5-13}{8} = -\frac{8}{8} = -1$$

**Návrat k původní proměnné:**

Dosadíme  $y_1: y_1 = \frac{9}{4} = x^2$ .  $\Rightarrow$  Řešíme rovnici:  $x^2 = \frac{9}{4}$ .

$$x^2 - \frac{9}{4} = 0$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$x_1 = -\frac{3}{2} \qquad x_2 = \frac{3}{2}$$

Dosadíme  $y_2$ :  $y_1 = -1 = x^2 \Rightarrow$  Tady nenajdeme žádné kořeny, neexistuje číslo, které je po umocnění na druhou záporné.

$$K = \left\{-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right\}$$

**Př. 7:** Petáková:  
strana 128/cvičení 74 b) d) e) f)

**Shrnutí:** Při substituci nahradíme složitější výraz novou neznámou a tím zjednodušíme rovnici. Po vyřešení zjednodušené rovnice se musíme vrátit k původní proměnné.